На правах рукописи

УДК 517.977.58

ЛЕБЕДЕВ Павел Дмитриевич

Аналитические и численные процедуры построения решений некоторых задач управления

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2009

Работа выполнена в Институте математики и механики Уральского отделения Российской академии наук в отделе динамических систем.

Научный руководитель	— кандидат физико–математических наук Успенский Александр Александрович.
Официальные оппоненты	— доктор физико–математических наук, профессор Тонков Евгений Леонидович
	— кандидат физико–математических наук Дарьин Александр Николаевич
Ведущая организация	— ГОУ ВПО «Челябинский государственный университет», г. Челябинск.

Защита диссертации состоится “___”_______________ 2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 по защите докторских и кандидатских диссертаций при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620000, г.Екатеринбург, пр.Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Автореферат разослан “___”________________ 2009 года

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико – математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ[1]

Актуальность темы Диссертация посвящена исследованию задач управления (в том числе конфликтного) динамическими системами. В работе предложены аналитические и вычислительные подходы к построению решений по существу негладких и невыпуклых задач. Представлены примеры, иллюстрирующие действенность аналитических методов, предложены и реализованы вычислительные алгоритмы построения приближенных решений.

Современный облик теории управления движением динамической системы сформировался в значительной степени под влиянием работ отечественных математиков Л.С. Понтрягина и Н.Н. Красовского, ставших основателями известных научных школ по теории управления. Весомые, основополагающие результаты были получены их коллегами и учениками — представителями московской научной школы Е.Ф. Мищенко, Р.В. Гамкрелидзе, В.Г. Болтянским, представителями уральской научной школы А.Б. Куржанским, Ю.С. Осиповым, А.И. Субботиным, а также зарубежными учеными Р. Калманом, Р. Беллманом, Р. Айзексом, У. Флемингом, Ж-П. Обеном. Существенный прогресс в становлении и развитии теории управления связан также с именами Э.Г. Альбрехта, В.Д. Батухтина, Р.Ф. Габасова, А.Я. Дубовицкого, С.Г. Завалищина, Ф.М. Кирилловой, А.А. Меликяна, А.А. Милютина, М.С. Никольского, А.А. Петросяна, Б.Н. Пшеничного, Н.Н. Субботиной, В.М. Тихомирова, Е.Л. Тонкова, В.Е. Третьякова, В.Н. Ушакова, А.Г. Ченцова, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрия и многих других. Актуальность изучения управляемых систем обусловлена наличием многочисленных приложений в различных отраслях знания — в механике, робототехнике, оптике, экономике, биологии. Немаловажным побудительным мотивом в исследовании являются внутренние потребности, возникшие в математической теории управления динамическими системами в условиях конфликта и неопределенности, а также стремление исследователей привлечь для изучения динами-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ № НШ-2640.2008.1, гранта РФФИ № 08-01-00587_а, федеральной программы Президиума РАН № 29

ческих задач конструкции из других разделов математики — негладкого анализа [8], дифференциальной геометрии [18], теории особенностей дифференцируемых отображений [2].

Осуществляемые в работе исследования проводятся в рамках концепции теории позиционных дифференциальных игр, развиваемой в научной школе Н.Н. Красовского [10, 11]. Теория позиционных дифференциальных игр, обогащенная результатами его соратников, учеников и последователей, объединяет конструктивные методы решения широкого круга проблем от теорем существования и единственности решения до разработки и реализации вычислительных алгоритмов [24, 7, 16]. Также используются конструкции отпочковавшейся от этой теории и получившей глубокое развитие в работах А.И. Субботина теории минимаксного решения уравнения в частных производных первого порядка [21].

Результатам последнего времени, связанным с проблемой построения (аналитического или приближенного) обобщенных решений уравнений типа Гамильтона–Якоби [21], предшествовали работы С.К. Годунова, E. Hopf, P.D. Lax, других авторов. В 70-х годах прошлого века С.Н. Кружков [12], реализуя метод исчезающей вязкости, ввел определение фундаментального (обобщенного) решения уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала посредством предельного перехода по параметру малости при старшей производной от решений соответствующих уравнений в частных производных второго порядка. Позднее, в 80-е годы, действуя аналогичным образом, М. Крэндалл и П.Л. Лионс ввели определение обобщенного решения уравнения в частных производных первого порядка, названного ими вязкостным решением. Несмотря на разницу минимаксного и вязкостного подходов, определяемый объект является одним и тем же. Отличительной чертой минимаксного подхода при изучении и численном построении обобщенных решений является активное вовлечение методов, средств и конструкций выпуклого и негладкого анализа. При этом используются наработки отечественных и зарубежных математиков [8]. Полезными с точки зрения разработки конструктивных подходов к построению обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка оказались методы теории особенностей дифференцируемых отображений, разрабатываемые В.И. Арнольдом [2, 3], его коллегами, зарубежными авторами Т. Постоном, И. Стюартом, Дж. Брусом, П. Джиблиным [5]. Средствами этой теории, в частности, формируются списки типичных особенностей каустик и волновых фронтов, предлагаются подходы к построению дискриминантных множеств.

Минимаксный подход вкупе с вязкостным подходом применяется для исследования обобщенных решений функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби, возникающих в задачах конфликтного управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с дискретными и\или распределенными параметрами [13]. Исследуются вопросы существования и единственности обобщенных решений, выявляются условия оптимальности гарантированного результата управления в таких задачах в случае исходных данных, удовлетворяющих условию Липшица [7].

Задачами быстродействия занимались многие исследователи. Привлечение идей,результатов и конструкций указанных выше теорий позволяет в рамках минимаксного подхода разрабатывать аналитические и аппроксимационные процедуры построения функции оптимального результата для задач динамического управления по быстродействию [9]. В диссертации эти подходы распространены на задачи быстродействия для частного случая вектограммы скоростей, а также задачи геометрической оптики [20]. Разработанные процедуры позволяют проводить численно-аналитическое конструирование эволюции волновых фронтов [2], обобщенного эйконала [20], позволяют численно строить функцию оптимального результата [1].

Геометрия волновых фронтов изучалась еще Х. Гюйгенсом, в частности им был сформулирован принцип прямолинейного распространения света [20]. Негладкие особенности фронтов были классифицированы и изучены В.И. Арнольдом и его учениками еще в семидесятые годы XX века. Ими выделены так называемые «множества симметрии», в которых системы лучей, каустик и волновых фронтов имеют особенности [2, 3]. Ирландский математик П. Джиблин предложил способы использования этих множеств в геометрической оптике и компьютерной графике [5]. Топология множеств симметрии изучена В.Д. Седых: выведены их эйлеровы характеристики в пространствах размерности до 6 включительно, количество и связь составляющих их гладких многообразий [19].

Понятие меры невыпуклости множества в произвольном евклидовом пространстве впервые предложено В.Н. Ушаковым в работе [22]. Эта мера имеет смысл угла и опирается на свойство проекций точки $\mathbf{x}$ на замкнутое множество M (т.е. ближайших к $\mathbf{x}$ в евклидовой метрике точек из M). Вводится понятие α-множества, обобщающее понятие выпуклого множества.

В семидесятые года XX века Н.Н. Красовский и А.И. Субботин [10] ввели понятие u-стабильных и v-стабильных функций, которые мажорируют и минорируют функцию цены. Функция цены является единственной функцией, которая одновременно u-стабильна и v-стабильна, а в точках дифференцируемости удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка (уравнению Айзекса–Беллмана). Эти свойства определяют одно и только одно обобщенное (минимаксное) решение уравнения Айзекса–Беллмана. Оно может быть определено несколькими эквивалентными способами, в том числе опираясь на субдифференциалы и супердифференциалы функции.

Множества негладкости функции цены дифференциальной игры или задачи управления имеют особый смысл с точки зрения построения оптимальных траекторий. Различные виды сингулярных поверхностей классифицированы Р. Айзексом в работе [1], и исследованы затем Н.Н. Красовский и А.И. Субботиным [10]. В настоящее время эти работы продолжаются в ИММ УрО РАН [9].

Уравнение типа эйконала изучались в геометрической оптике с целью построения линий распространения света и волновых фронтов от источника на плоскости или в трехмерном пространстве. Эйконал называется еще оптическим путем волны и в общем случае является негладкой функцией. Один из подходов к его построению, как было отмечено выше, предложен С.Н. Кружковым [12]. В диссертации однако делается упор на построение минимаксного решения уравнения Айзекса–Беллмана для задачи быстродействия, которое в некотором смысле эквивалентно уравнению эйконала. Его решение для некоторых частных случаев изучались, в частности, в монографии [4].

Стабильные мосты в дифференциальных играх, которые рассматриваются в третьей главе, являются одной из главных тем научной школы Н.Н. Красовского на Урале. Выделение максимального стабильного моста в пространстве позиций — одна из основных и наиболее сложных задач, возникающих на пути построения решения дифференциальной игры. Задачи о сближении с целевым множеством в момент ϑ и на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$ являются одними из наиболее важных в теории дифференциальных игр. Они связаны с многими крупными задачами оптимального гарантированного управления динамическими системами [24], в частности, — с задачей об оптимальном быстродействии для динамических систем, подверженных влиянию помех [10]. Кроме того, в рамки общей постановки таких задач укладываются многие конкретные дифференциальные игры [1].

Ведя исследования дифференциальных игр в рамках позиционного подхода, центральными элементами которого являются множества позиционного поглощения — максимальные u-стабильные мосты [10], В.Н. Ушаков, Х.Г. Гусейнов и А.М. Тарасьев [6] предложили инфинитизимальные конструкции при построении стабильных мостов, которые используют методы негладкого анализа. Они позволяют свести установление совпадения максимальных u-стабильных мостов для стационарных систем к проверке относительно простых соотношений для вектограммы скоростей в точках границы целевого множества [23].

Цель работы.

К основным целям диссертации относятся:

1. Изучение и характеризация свойств плоских невыпуклых множеств с негладкой границей посредством множеств симметрии;

2. Разработка и реализация алгоритмов аналитического и численного построения функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия с невыпуклым целевым множеством;

3. Разработка и реализация алгоритмов численного построения эволюции волновых фронтов и обобщенного эйконала для среды с постоянным показателем преломления;

4. Выявление необходимых и достаточных условий совпадения стабильных мостов в задаче сближения в двух, вообще говоря, различных игровых постановках — в игре сближения «в момент» и в игре сближения «к моменту».

Методы исследования.

Исследования проводятся в рамках подхода, разрабатываемого в научной школе Н.Н. Красовского [10, 11] по управлению и дифференциальным играм. Один из способов опирается на построение нормалей к кривой, ограничивающей целевое множество. В другом случае узлы выбираются фиксированными, и для каждого из них находится аппроксимация проекций на целевое множество.

Нахождение меры невыпуклости множества сводится к поиску максимума функции нескольких переменных на объединении нескольких нульмерных и одномерных многообразий. За счет параметризации точек эта задача в свою очередь сводится к нахождению экстремума функции одной переменной на нескольких ограниченных либо неограниченных интервалах. Для некоторых множеств найдено аналитическое значение меры невыпуклости.

Проверка совпадения максимальных u-стабильных мостов в двух различных задачах о сближении осуществляется различными способами. Одни из них базируется на проверке условий стабильности для вектограмм скоростей и конусов, аппроксимирующих целевое множество в точках его границы. Другие — на свойствах гамильтониана системы в точках границы ∂M множества M и на описании множества в виде системы неравенств.

Вычисления производились в программном пакете MATLAB 6.1 [15], который позволяет использовать математические библиотеки для ускорения составления алгоритмов. В нем предусмотрена визуализация результатов, включая анимацию и трехмерную графику.

Научная новизна.

Данная работа является продолжением исследований задач управления, которые проводились и проводятся в настоящий момент в Институте математики и механики УрО РАН и, в том числе, в отделе динамических систем Института. Эта диссертация продолжает исследования по вычислению меры невыпуклости плоских множеств, построению обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби, а также по нахождению условий совпадения максимальных u-стабильных мостов в дифференциальных играх в момент и к моменту.

Научная новизна диссертации состоит в том, что для решения первой из упомянутых задач предложены аналитические и численные методы. К первым относятся выражение меры невыпуклости $\alpha(M)$ для множеств M, являющихся подграфиками дифференцируемой почти всюду функции $f(x)$. Ко вторым относятся построение биссектрисы множества, частного случая множества симметрии, объединения точек, имеющих ненулевую угловую характеристику. На них традиционными методами находятся экстремумы угловой характеристики.

При решении второй задачи тоже используются множества симметрии (биссектрисы). С их помощью строятся волновые фронты — линии уровня функции оптимального результата в задаче быстродействия с круговой индикатрисой скоростей. На границе множества выделяются характеристические точки (псевдовершины), отвечающие за зарождение биссектрисы множества.

Задача о совпадении максимальных u-стабильных мостов в двух дифференциальных играх исследуется с применением инфинитизимальных конструкций, как то контингентные конуса, производные множества стабильного моста в прямом и обратном времени. Условие стабильности выписывается также для случая, когда целевое множество задано виде системы неравенств для непрерывно дифференцируемых функций и неравенства для функции дифференцируемой по направлениям. Используются свойства гамильтониана системы, в частности его выпуклость.

Теоретическая и практическая ценность. Представленная работа имеет теоретическую ценность: в ней предложены аналитические методы вычисления меры невыпуклости множеств, построения функции цены для одного класса задач быстродействия. Разработаны критерии совпадения решения различных задач быстродействия, допускающие различное описание целевого множества.

Практическая ценность работы обусловлена возможностью применения полученных в ней результатов в различных отраслях знания. Построения волновых фронтов и вычисление эйконала является важной задачей оптики и электродинамики [20]. В диссертации исследована геометрия волновых фронтов с круговой вектограммой для случая невыпуклого источника, имеющего кусочно-гладкую границу. Разработаны аналитические и численные алгоритмы эволюции волновых фронтов, предложены процедуры построения многообразий, «сотканных» из изломов волновых фронтов [2]. Обоснована формула минимаксного (обобщенного) решения задачи Дирихле для уравнения типа эйконала в случае изотропной среды при предположении, что краевое множество замкнуто, причем имеет кусочно-гладкую границу. Предложен конструктивный подход к построению минимаксного решения. Результаты, полученные в части совпадения максимальных u-стабильных в различных дифференциальных играх позволяют сводить решение более сложной задачи к решению более простой [14, 17].

Апробация работы. Главные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях. Сделаны доклады

- Конференция «Теория управления и математическое моделирование». Ижевск, УдГУ, 3–8 июля 2006.

- Научный семинар Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений. М., МГУ. 2006.

- IX Международная Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Иркутск, июнь 2007.

• XXII Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И.Г.Петровского, Москва, МГУ, 21-25 мая 2007.

• «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики», Тамбов, октябрь 2007.

• Международная конференция Дифференциальные уравнения и топология. М.: МГУ. 2008.

• Международная конференция Дифференциальные уравнения и топология. М.: МГУ. 2008.

• Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, октябрь 2008.

• Научный конференция-семинар «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева, Ижевск, май 2008.

• Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология». М.: МГУ. 2008.

• «Алгоритмический анализ неустойчивых задач». Международная конференция, посвященная 100-летию В.К. Иванова. Екатеринбург. ИММ УрО РАН, 2008.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шестнадцати работах, приведенных в конце автореферата, шесть из них в изданиях, включенных в перечень ВАК. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, А.А. Успенским, и чл.-корр. РАН В.Н. Ушаковым, исследованы задачи оптимального управления и дифференциальные игры методами, предложенными в диссертации. Приведены примеры численного моделирования ряда задач и визуализации результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, списка литературы, включающего 117 названий, и приложения. Общий объем работы составляет 150 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из настоящего введения, списка сокращений и обозначений, трех глав, объединяющих 17 параграфов и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 150 страниц, библиографический список включает 131 наименование, иллюстративный материал насчитывает 35 рисунков. Нумерация параграфов осуществляется в пределах каждой главы. Нумерация формул двойная: в первой позиции указывается номер параграфа, в котором приведена формула, во второй — порядковый номер формулы в этом параграфе. Такая же нумерация принята для определений, теорем, замечаний, примеров и рисунков.

Глава I диссертации посвящена изучению меры невыпуклости множества. В ней исследуются множества симметрии, волновые фронты, угловая характеристика точек относительно множества и их взаимосвязь. В параграфе 1.1 дается определение угловой характеристики точки $\alpha_{M}(\mathbf{z})$ и меры невыпуклости $\alpha(M)$ замкнутого множества в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для их вычисления вводятся новые понятия — биссектрисы $L(M)$ и псевдовершины W множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Биссектриса $L(M)$ является частным случаем множества симметрии с точки зрения геометрии множества M, для всех ее точек угловая характеристика отлична от нуля. Псевдовершины — характеристические точки границы ∂M множества M, отвечающие за зарождение биссектрисы.

В параграфе 1.2 изучаются свойства биссектрисы и псевдовершин. Приводятся условия нахождения псевдовершин и формулы для построения гладких участков биссектрисы. Доказана теорема о том, что псевдовершины, лежащие на участках гладкости кривой Γ, совпадающей с границей ∂M множества M, есть точки локального максимума кривизны Γ. Выписано уравнение, связывающее координаты двух точек, являющихся проекциями на множество M одной точки $\mathbf{y}$ биссектрисы $L(M)$ (то есть являющимися ближайшими к ней в евклидовой метрике точками множества M).

Параграф 1.3 посвящен изучению свойств проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершин. Проведена их классификация в зависимости от свойств гладкости кривой Γ в псевдовершине W. Выделены случаи, когда в ней кривая Γ имеет второй порядок гладкости (то есть определены касательная и кривизна в этой точке), первый порядок (то есть определена касательная, но не определена кривизна) и гладкость нарушается (не определена касательная). Доказаны теоремы о дифференциальных свойствах решений уравнения, связывающего координаты проекций точек биссектрисы в окрестностях псевдовершины.

Параграф 1.4 описывает строение биссектрис в окрестности точек прекращения. Выписаны координаты этих точек для разных типов, порождающих их псевдовершин. Доказана теорема о том, что если в псевдовершине W определен радиус кривизны R кривой Γ, то точка прекращения V биссектрисы $L(M)$ совпадает с центром кривизны Γ в псевдовершине W. В случае негладкой псевдовершины W имеет место совпадение V и W. Если в псевдовершине определены предельные значения радиуса кривизны Γ с двух сторон, то точка V есть линейная комбинация пределов центра кривизны в W слева и справа.

Параграф 1.5 посвящен нахождению достаточных условия гладкости биссектрисы и построению к ней касательной. Доказано, что если точка $\mathbf{y} \in L(M)$ имеет ровно две проекции $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, лежащие на гладких участках кривой Γ, то в ней определена касательная Π к биссектрисе $L(M)$. При этом Π совпадает с биссектрисой угла $\angle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}, \mathbf{x}_2$.

В параграфе 1.6 предложены аналитические методы нахождения меры невыпуклости $\alpha(M)$ для случаев, когда M — подграфик кусочно-гладкой функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Приведена и доказана теорема о мере невыпуклости подграфика выпуклой всюду дифференцируемой функции $f(x)$:

$$\alpha(M) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} f'(x) - \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} f'(x).$$

Аналогично приведена теорема для подграфика функции $f(x)$, дифференцируемой всюду, кроме точки x_*, для которой выполняется условия

1) $\lim\limits_{x \to x_*,\, x < x_*} f'(x) < \lim\limits_{x \to x_*,\, x > x_*} f'(x)$

2) $f(x)$ — выпуклая вверх функция на интервалах $(-\infty, x_*)$ и (x_*, ∞).

Тогда мера невыпуклости множества $M = \operatorname{hypo} f$ равна

$$\alpha(M) = \lim_{x \to x_*,\, x > x_*} \operatorname{arctg} f'(x) - \lim_{x \to x_*,\, x < x_*} \operatorname{arctg} f'(x).$$

Параграф 1.7 содержит примеры построения биссектрис и вычисления меры невыпуклости для множеств с кусочно-гладкой границей. Рассмотрены множества, являющиеся подграфиками алгебраических, тригонометрических, показательных функций, а также их склеек. Для наиболее простых случаев мера невыпуклости находится аналитически по формулам параграфа 1.6. В остальных мера невыпуклости находится численными методами.

Глава II диссертации посвящена изучению свойств решения $u = u(\mathbf{x})$ задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством.

В параграфе 2.1 приводятся различные постановки задачи, в том числе в виде краевой задачи для уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 1 = 0,$$

$$u|_\Gamma = 0,$$

и уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби

$$\min_{\nu : \|\nu\| \leqslant 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 1 = 0,$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие $u|_\Gamma = 0$ определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$.

Собственно задача быстродействия для динамической системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1 \\ \dot{y} = \nu_2 \end{cases}$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leqslant 1$.

В параграфе 2.2 сформулирована и доказана теорема о том, что функция евклидового расстояния от точки до множества M является обобщенным (минимаксным) решением уравнения в частных производных Айзекса–Беллмана с краевым условием, определенным на границе множества M. Изучаются свойства биссектрисы множества, как множества негладкости функции оптимального результата и сингулярной (рассеивающей) линии для задачи управления.

Параграф 2.3 посвящен изучению асимптотики линий негладкости решения $u(\mathbf{x})$. Доказано теорема о достаточных условиях существования асимптот биссектрисы. Если множество M — односвязное и невыпуклое, его дополнение $D = \mathrm{co}\, M \setminus M$ до выпуклой оболочки $\mathrm{co}\, M$ состоит из конечного числа компонент связности $D_i, i = 1, ..., n$ и некоторая компонента связности D_i — ограниченное множество, то множество $\partial D_i \cap \partial(\mathrm{co}\, M)$ является отрезком, и срединный перпендикуляр к нему η — асимптота биссектрисы $L(M)$. Одновременно показано, что данное условие не является необходимым. Возможно существование асимптот в частности в случае, когда дополнение $\mathrm{co}\, M \setminus M$ — множество односвязное, но неограниченное.

В параграфе 2.4 приведен пример аналитического построения функции оптимального результата для задачи быстродействия с невыпуклым целевым множеством. А именно, когда множество M — подграфик функции $f(x) = x^2$. Биссектриса лежит на оси ординат

$$L(M) = \{(x, y) : \; x > 0.5, \; y = 0\}.$$

А функция оптимального результата $u(x, y)$ вычисляется по формуле

$$u(x, y) = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - x_p^2)^2},$$

$$x_p = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{4} + \sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{(2y-1)^3}{216}}} + \sqrt[3]{\frac{x}{4} - \sqrt{\frac{x^2}{16} - \frac{(2y-1)^3}{216}}}, \ y \leqslant E(x) \\ -2\sqrt{\frac{2y-1}{6}} \cos \frac{\arccos \frac{-3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, \ x \leqslant 0, \ y > E(x) \\ 2\sqrt{\frac{2y-1}{6}} \cos \frac{\arccos \frac{3\sqrt{6}x}{(2y-1)^{3/2}}}{3}, \ x > 0, \ y > E(x) \end{cases}$$

Здесь $E(x) = \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{27}{16}x^2}$.

Параграф 2.5 содержит примеры численного конструирования функции оптимального результата $u(x, y)$ в задаче быстродействия для множеств с кусочно гладкой границей на основе построения их биссектрис. В качестве целевых множеств взяты подграфики функций и одно множество, ограниченное эллиптической кривой. Выделены области их негладкости, в частности проиллюстрировано, что в точках биссектрисы $L(M)$ функция $u(x, y)$ супердифференцируема.

Глава III диссертации связана с изучением взаимосвязи дифференциальных игр сближения-уклонения «в момент» и «к моменту».

В параграфе 3.1 рассматривается конфликтно-управляемая система, поведение которой на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается векторным дифференциальным уравнением.

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \ x[t_0] = x_0, \ u \in P, \ v \in Q.$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Изучаются и сравниваются две игровые задачи о сближении системы с терминальным множеством M в фазовом пространстве [11]. В первой из них первому игроку требуется обеспечить с помощью позиционного управления попадание фазового вектора системы на M в конечный момент времени ϑ. Во второй задаче требуется обеспечить с помощью позиционного управления попадание фазового вектора системы на M не позже момента ϑ.

Параграф 3.2 содержит определения и основные свойства ключевых элементов дифференциальной игры, в частности операторов стабильного поглощения и стабильных мостов. Максимальные u-стабильные мосты (множества позиционного поглощения) являются ключевыми элементами разрешающей конструкции в обеих задачах управления.

В параграфе 3.3 приводятся теоремы о геометрических условиях совпадения максимальных u-стабильных мостов в двух задачах о сближении.

В параграфе 3.4 сформулированы и доказаны теоремы об аналитических критериях совпадения максимальных u-стабильных мостов, опирающихся на представление целевого множества в виде системы неравенств для дифференцируемых функций, либо одного неравенства для функции дифференцируемой по направлениям. Исследованы два примера для системы с одинаковой динамикой

$$\frac{dx}{dt} = B(x)u + C(x)v,$$

где

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор системы,

$u \in P,\ v \in Q$ — управления 1 и 2 игроков,

$P = Q = \{(x_1, x_2) : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, x_2 = 0\}$ — ограничения на управление,

$$B(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix},\ C(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В одном случае в качестве целевого множества M взят квадрат с вершинами $\Upsilon_1 = (1, 1)$; $\Upsilon_2 = (1, -1)$; $\Upsilon_3 = (-1, -1)$; $\Upsilon_4 = (-1, 1)$, и показано, что максимальные u-стабильные мосты в обеих задачах совпадают. В другом взят треугольник с вершинами $\Upsilon_1 = (0, 1)$; $\Upsilon_2 = \left(-\sqrt{3}/2, -0.5\right)$; $\Upsilon_3 = \left(\sqrt{3}/2, -0.5\right)$. Тогда максимальные u-стабильные мосты не совпадают, а точнее мост в задаче о сближении «в момент» строго вложен в мост в задаче о сближении «к моменту».

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзекс. Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. — 334 с.
3. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Изд.-во МГУ, 1983. — 80 с.
4. *Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.* Пространственно–временной лучевой метод: Линейные и нелинейные волны. М.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 272 с.
5. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. — 262 с.
6. *Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.* Дифференциальные свойства интегральных воронок стабильных мостов // Прикладная математика и механика. 1991. №55 (1), С. 72–78.
7. *Дарьин А.Н.* Синтез управлений при двойных и неоднородных ограничениях // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. 01.01.02. — дифференциальные уравнения. МГУ им. М.В. Ломносова. М. 2004. 15 с.
8. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. — 384 с.
9. *Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.* Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания — В кн.: Алгоритмы и программы решения линейных дифференц. игр: Сб. ст. ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 127–158.
10. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. — 456 с.
11. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. — 420 с.
12. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала // I. Математический сборник. 1975. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.

13. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством. // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 3–13.
14. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Мат. Ин-та им. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
15. *Мэтьюз Д., Финк К.* Численнтые методы. Использование MATLAB (3-е издание). СПб.: Вильямс, 2001. — 720 с.
16. *Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. МИАН. 2008. Т. 262, С. 202–221.
17. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1281.
18. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал, УРСС, 2003. — 432 с.
19. *Седых В.Д.* Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения // Докл. РАН. — 2002. — т.383, № 6. — с. 735-39. — Библиогр.: 7 назв.
20. *Слюсарев Г.Г.* Геометрическая оптика. М.: Издательство Академии наук СССР, 1946. — 332 с.
21. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 336 с.
22. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* α-множества и их свойства// Ин-т математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 2004. — 62 с.: 38 ил. — Библиогр.: 7 назв. — Рус — Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004
23. *Ушаков В.Н.* Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх.: Дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. Свердловск, 1991. 308 с. / Ин-т математики и механики УрО АН СССР.
24. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах:

1. *Лебедев П.Д.* Вычисление меры невыпуклости плоских множеств // Труды Института математики и механики. Том 13, № 3. 2007 г. С. 84–94.

2. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Известия вузов. Математика. №3 (550). 2008 г. С. 27–37.

3. *Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.* Построение минимаксного решения уравнений типа эйконала // Труды Института математики и механики. Том 14, № 2. 2008 г. С. 182–191.

4. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Алгоритмы построения функции оптимального результата в задаче с простой динамикой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Вып. 2. 2008 г. С. 152–154.

5. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстродействия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики. Том 14, № 4. 2008. С. 82—99.

6. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 49, № 3. 2009. С. 431–440.

7. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. № 7. 2009. С. 50–57.

8. *Ушаков В.Н., Гусейнов Х.Г., Латушкин Я.А., Лебедев П.Д.* О совпадении максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении для стационарных управляемых систем // Труды Института математики и механики. Том 15, № 3. 2009. С. 219—240.

Другие публикации:

9. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* К вопросу о геометрии волновых фронтов // Известия Института математики и информатики. Ижевск, УдГУ. 2006. Вып.3 (37). С. 79–80.

10. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* К вопросу о геометрии волновых фронтов // Научный семинар Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений. М., МГУ. 2006. С. 40–41.

11. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. 9-й междунар. Четаевской конф. 2007. Т. 5. С. 224–236.

12. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика. Труды факультета ВМК МГУ. №27. 2007 г. С. 65–79.

13. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Численно-аналитические методы построения волновых фронтов в задачах управления и геометрической оптике // Вестник Тамбовского университета. 2007. Т. 12, вып. 4. С. 538–539.

14. *Лебедев П.Д., Успенский А.А.* Построение обобщенного решения уравнения в частных производных первого порядка // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию В.К. Иванова. 2008 г. С. 240–241.

15. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Аналитические и численные подходы к построению функции оптимального результата для задачи быстродействия // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология». Тезисы Докладов. М.: МГУ. 2008. С. 409–410.

16. *Ушаков В.Н., Латушкин Я.А., Лебедев П.Д.* Критерии совпадения максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология». Тезисы докладов. М.: МГУ. 2008. С. 411–412.

17. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Конструкции негладкого анализа при построении минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология». Тезисы Докладов. М.: МГУ. 2008. С. 412.

18. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Численно-аналитический подход к построению функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Международная конференция «Управление динамическими системами». ИПМех РАН. Тезисы докладов. 26–30 января 2009. С. 65.

Подписано в печать 16.09.2009. Формат 60x90 1/16
Гарнитура Times. Печать ротационная трафаретная.
Усл. печ. л. 5. Уч.-изд.л. 4,3
Тираж 150 экз. Заказ № 2152
Отпечатано в типографии «Артикул»
620026 г. Екатеринбург, ул. Декабристов, 20